Tercer curso. Opción aplicadas.
(4 periodos semanales distribuidos idealmente en 2+2)

Edad ideal => 14 años para 15.

Se ruega dimensionar los deberes para casa teniendo en cuenta que el alumno ha de estudiar cada tarde DOS horas y MEDIA que dedicará a todas las asignaturas de la secundaria (no solo a matemáticas).

Se permite el uso de CALCULADORA[1].

Primera evaluación (11 semanas)

[2]Estadística unidimensional (2 semanas)

Significado de la notación de intervalos elementales: (a, b), [a, b), (a, b], [a, b][3].
Acercamiento a la representatividad de una muestra y a los métodos de selección de muestras[4]. Ilustración con problemas reales: encuestas electorales, estudios de audiencia, IPC, accidentes de automóvil, seguros, medicamentos, vacunas[5]... Variables estadísticas cuantitativas discretas y continuas[6]. Cálculo del número de intervalos[7] y de las marcas de clase[8] en distribuciones continuas. Añadir las medidas de centralización[9],

---

[1] **Se recomienda que todos los alumnos adquieran una calculadora que facilite las explicaciones en clase y que les valga para todo su paso por la Enseñanza Secundaria. La propuesta es la calculadora Casio fx–991SP u otra de similares prestaciones y manejo.**

[2] Se empieza por los bloques de estadística y geometría para gradar incrementalmente los contenidos respecto a 1º y 2º de ESO en el mismo trimestre, posibilitando así el repaso de la materia para los alumnos con la asignatura pendiente.

[3] Se necesita entender lo que es un intervalo antes de introducir las variables continuas de la estadística. Al final del tercer trimestre de este curso se volverán a emplear en análisis. El tema se abordará otra vez en 4º al dar las inecuaciones y las funciones a trozos. ¡Ojo! Hay que estar alerta porque ciertos alumnos tienden a confundir un intervalo con las coordenadas de un punto, lo cual provoca muchos malentendidos desagradables (sobre todo en análisis).

[4] Este es el primer contacto de los alumnos con las técnicas de muestreo. Solo se pretende que se familiaricen con el vocabulario (muestreo aleatorio, de juicio, probabilístico, sistemático, estratificado) y vean la importancia de las decisiones que se toman en esta fase a la hora de diseñar un estudio estadístico.

[5] Se sugiere introducir ejemplos de bioestadística que colaboren a despertar la vocación científico-sanitaria.

[6] Con muestras de un número de datos igual o inferior a diez, la distribución se podrá tabular como discreta a pesar de ser conceptualmente continua (con diagrama de barras incluido). Del mismo modo, cuando la variable estadística sea discreta pero la muestra tenga un número de datos igual o superior a treinta, la distribución se podrá tabular en intervalos con marca de clase (con histograma incluido). Se ruega la presentación de datos creíbles que limiten las operaciones y conclusiones disparatadas.

[7] Para facilitar los cálculos, el convenio será el siguiente => Ejemplo: se observa que los datos de una distribución continua se mueven entre un valor mínimo= 43 y un valor máximo=100 y la muestra se compone de N=75 datos; por tanto, el número de intervalos (si no se dan ya en el ejercicio) será la parte entera de la raíz cuadrada de N (es decir, la aproximación por truncamiento a las unidades) => $\sqrt{N} = \sqrt{75} = 8{,}6602\ldots \cong 8 = número\ de\ intervalos$; la amplitud de cada intervalo será la aproximación por exceso al medio punto en esta operación => *amplitud =a* => $\frac{Rango}{número\ de\ intervalos} = \frac{X_{máx}-X_{mín}}{número\ de\ intervalos} = \frac{100-43}{8} = \frac{57}{8} = 7{,}125 \cong 7{,}5 = a$; entonces, el primer intervalo será [L_1, L_2)= [L_1, a+L_1)= [43, 50’5) y el último de los ocho intervalos será [L_8, L_9) = [L_8, a+L_8) = [95’5, 103). Nota: se asume gustosamente el error de terminar en 103 en lugar de hacerlo en 100 en aras de una mayor claridad de ejecución para

posición[10] y dispersión de variables continuas[11]. Añadir los histogramas y los diagramas de caja–bigotes a los diagramas estudiados en cursos pasados (ya tienen que saber dibujar diagramas de barras, polígonos de frecuencias y sectores). Elección del gráfico adecuado según la naturaleza de los datos. Interpretación crítica de los estudios estadísticos mostrados por los medios de comunicación[12]: número de individuos estudiados (muestra) versus número de individuos de los que se pretende sacar conclusiones (población); fiabilidad de los datos presentados (¿cómo se han obtenido? Si son preguntas a personas y a tenor de la pregunta efectuada, ¿se podría comprobar si los individuos no mienten al contestar?); parámetros estadísticos que se facilitan (además de la media); cambio en las escalas que se emplean para hacer los gráficos; conclusiones más o menos objetivas que se publican como colofón al estudio… Interpretación conjunta de todos los parámetros en distribuciones discretas y continuas. Constatación de que intervalos centrados en la media con amplitudes crecientes de múltiplos de la desviación típica, irán incluyendo cantidades crecientes de datos.
Realización de ejercicios con y sin calculadora, con y sin hoja de cálculo.

Probabilidad (2 semanas)

Repaso de los conceptos claves estudiados en 2º de ESO => Experiencias aleatorias simples[13]. Ejemplos de experiencias aleatorias simples donde interviene el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, la extracción de una carta en una baraja, la extracción de una bola en una urna llena de bolas de colores o la extracción de una bola en una urna llena de bolas numeradas. Espacio muestral de sucesos elementales correspondiente a las anteriores experiencias simples. Constatación de que, con los mismos objetos, el espacio muestral de sucesos elementales será distinto dependiendo de la experiencia simple[14]. En una experiencia simple, suceso compuesto por unión de sucesos elementales[15]. Suceso contrario. Suceso seguro por unión de todos los sucesos elementales posibles. Suceso imposible. En una experiencia simple, suceso

---

el alumno; asimismo, se permite escribir [95’5, 103) en lugar de [95,5, 103) para evitar posibles confusiones en el uso de decimales dentro de intervalos.

[8] Se recuerda que el convenio es x_i para la marca de clase del intervalo $[L_i, L_{i+1})$; por tanto, a esta marca de clase le corresponde $a_i=L_{i+1}-L_i$ de amplitud de ese intervalo, F_i de su frecuencia absoluta y FA_i de su frecuencia absoluta acumulada.

[9] En variables continuas la mediana se calculará aplicando la fórmula siguiente: $Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - FA_{i-1}}{F_i} \cdot a_i$

[10] Para el cálculo de los cuartiles de una distribución continua, previamente se debe buscar (en la columna de frecuencias absolutas acumuladas FA) en qué intervalo se encuentra $\frac{N}{4}$ para el Q_1, $\frac{N}{2}$ para el Q_2 y $\frac{3N}{4}$ para el Q_3 ; una vez identificado el intervalo $[L_i,L_{i+1})$, se aplican las fórmulas siguientes:

$Q_1 = L_i + \frac{\frac{N}{4} - FA_{i-1}}{F_i} \cdot a_i$ $\qquad Q_2 = Me$ $\qquad Q_3 = L_i + \frac{\frac{3N}{4} - FA_{i-1}}{F_i} \cdot a_i.$

[11] A los alumnos más avanzados se les puede explicar que la varianza no es más que la media de las distancias de la variable estadística x a la media $\bar{x}$ (calculadas al cuadrado para evitar que el resultado se anule) => $Var = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N} = \frac{\sum(x^2-2x\bar{x}+\bar{x}^2)}{N} = \frac{\sum x^2}{N} - \frac{2\bar{x}\sum x}{N} + \frac{\bar{x}N}{N} = \frac{\sum x^2}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \bar{x}^2.$

[12] ¡Ojo! No hay comparación entre distribuciones (se deja para 4º). Se pretende que se focalicen en el estudio de una distribución en particular.

[13] Se experimenta una sola vez observando una sola característica de los objetos involucrados.

[14] Ejemplo: extraemos una carta de una baraja española ampliada y nos fijamos en el palo => Ω = {Oros, Copas, Espadas, Bastos}; extraemos una carta de una baraja española ampliada y nos fijamos en el número => Ω’= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. En ambos casos los elementos coinciden (las cartas de la baraja española ampliada) pero los espacios muestrales difieren porque dependen de la experiencia aleatoria definida.

[15] Suceso compuesto A = número impar = {1, 3, 5} obtenido de la experiencia simple de lanzar un dado y mirar la cara hacia arriba.

compuesto por unión o intersección de otros sucesos compuestos[16]*. Sucesos compuestos compatibles y sucesos compuestos incompatibles. Constatación de que los sucesos elementales del espacio muestral de cualquier experimento simple son incompatibles por definición*[17]*. Álgebra de sucesos en una experiencia aleatoria simple:* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$*. Probabilidad de un suceso dada como un número entre 0 y 1 o como un porcentaje entre 0% y 100%. Experiencia aleatoria regular como aquella experiencia aleatoria en la que todos los elementos involucrados tienen la misma posibilidad de ser observados*[18]*. Adjudicación de probabilidades a los sucesos elementales de estas experiencias regulares mediante la ley de Laplace (cociente entre casos favorables y posibles). Diferencia entre probabilidad a priori (hallada teóricamente) y probabilidad a posteriori (hallada empíricamente por imposibilidad de hallarla teóricamente*[19]*). Constatación de que la suma de las probabilidades de los sucesos elementales de un espacio muestral es 1. Diferencia entre sucesos elementales equiprobables y sucesos elementales no equiprobables*[20]*.* Adjudicación de probabilidades a sucesos compuestos sumando las probabilidades de los sucesos elementales involucrados, usando la ley de Laplace (si se puede)[21] o ayudándose del álgebra de sucesos. Constatación de que la probabilidad del suceso seguro es 1 y del suceso imposible 0. Cálculo de la probabilidad del sucesos contrario => experiencia dicotómica que genera[22]. En una experiencia simple,

---

[16] Suceso compuesto C = (número impar) U (múltiplo de tres) = AUB en el experimento simple de lanzar un dado y mirar la cara hacia arriba, donde A y B son a su vez sucesos compuestos de sucesos elementales.

[17] Por eso las probabilidades de sucesos compuestos de uniones de sucesos elementales se hallarán sumando las probabilidades de los sucesos elementales involucrados.

[18] Ejemplo1: en la experiencia aleatoria simple de lanzar un dado normal para observar el número de la cara de arriba=> todas las caras tienen la misma posibilidad de ser observadas; ejemplo2: lanzamiento de un dado trucado con tres caras 1, dos caras 4 y una cara 5 para observar el número=> todas las caras siguen teniendo la misma posibilidad de ser observadas (otra historia es la probabilidad que tiene cada número de ser observado).

[19] La experiencia no es regular y, por tanto, no podemos aplicar la ley de Laplace => No conocemos el número de bolas dentro de la urna o el número de cartas en la baraja; los dados y las monedas están trucados pero no conocemos la naturaleza del engaño (imposible predecir el resultado antes de realizar la experiencia). Hallar probabilidades a posteriori no es objeto ni de 2º ni de 3º ESO (se necesita el concepto de frecuencia relativa que se dará profundamente en 4º ESO para entender la ley de los grandes números). Por lo tanto, de aparecer en algún ejercicio, se tiene que facilitar el dato. Ejemplo1: en la experiencia aleatoria simple de lanzar una chincheta para observar de qué lado cae, se sabe que el 65% de las veces cae con el pincho para arriba; ejemplo2: en la experiencia aleatoria simple de extraer una bombilla de una cadena de producción para observar está defectuosa o no, se sabe que el 1% de las bombillas están defectuosas; ejemplo3: en la experiencia aleatoria simple de mirar al cielo para observar si está despejado, nublado o directamente lloviendo, se sabe que el 35% de los días está despejado, el 30% está nublado y el resto lloviendo.

[20] Ejemplo: en la experiencia de lanzar un dado no trucado y mirar el número de la cara de arriba, el espacio muestral es Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} => como todas las caras tienen la misma posibilidad de salir, aplicamos Laplace para hallar las probabilidades de los sucesos elementales, obteniendo que todas son 1/6 (todos los sucesos elementales son equiprobables); en la experiencia de lanzar un dado trucado con dos caras 1 y ninguna 6, el espacio muestral Ω' = {1, 2, 3, 4, 5} => como todas las caras tienen la misma posibilidad de salir, aplicamos Laplace para hallar las probabilidades de los sucesos elementales, obteniendo que p(1)=1/3, p(2)=1/6, p(3)=1/6, p(4)=1/6, p(5)=1/6, luego no son equiprobables.

[21] Ejemplo: en la experiencia de lanzar un dado no trucado y mirar el número de la cara hacia arriba, p(obtener impar)=1/2; en la experiencia de lanzar un dado trucado con dos caras 1 y ninguna 6, p(obtener impar)=2/3. En ambos ejemplos se aplica Laplace por la regularidad de la experiencia.

[22] Ejemplo1: en la experiencia simple de extraer una carta de una baraja española, se mira únicamente si es o no copa => Ω ={copa, no copa}, resulta ser una experiencia dicotómica. Ejemplo2: en la experiencia de extraer una bola de una urna con 3 bolas azules, 4 bolas rojas y 2 bolas blancas para mirar el color de la bola, se define A= "sacar azul" y B="no sacar azul" (sucesos contrarios uno del otro) => $A=B^c$ y $B=A^c$, por lo tanto p(A)=3/9 y p(B)= 6/9=$p(A^c)$=1–p(A)=1–3/9. Además, con la misma urna, el alumno fácilmente podría definir una nueva experiencia aleatoria simple que observara si la bola es azul o no es azul (dicotómica).

cálculo de las probabilidades de sucesos compuestos compatibles[23]: p(A∪B)=p(A)+p(B)–p(A∩B). En una experiencia simple, cálculo de las probabilidades de sucesos compuestos incompatibles[24]: p(A∪B)=p(A)+p(B). Constatación de que cuando la suma de las probabilidades de dos sucesos es mayor que 1, significa que los sucesos son compatibles; sin embargo, que esa suma sea menor que 1 no equivale a que los sucesos sean incompatibles[25]. Probabilidad condicionada en sucesos de una experiencia aleatoria simple[26]: p(A|B)=p(A∩B)/p(B). Discusión de si dos sucesos son dependientes o independientes entre sí[27]. Problemas que engloben todo lo anterior.

Geometría (7 semanas)

Lugares geométricos planos dibujados de manera sencilla e intuitiva como puntos del plano que cumplen una condición particular que los hace interesantes en otros ámbitos (de las matemáticas, de la naturaleza, de la técnica o de la industria): mediatrices, bisectrices (ambos vistos en 1º de ESO), gráfica de una función[28], arco capaz, cónicas[29], espirales[30], catenaria…
Dibujo detallado de rectas y puntos notables del triángulo, manualmente y ayudándose de software matemático: medianas (baricentro), alturas[31] (ortocentro), mediatrices (circuncentro), bisectrices (incentro). Constatación de las propiedades que se derivan de cada uno de estos puntos y/o rectas: baricentro como centro de masas (o de gravedad) del triángulo (2/3 al vértice y 1/3 al lado opuesto); circuncentro como centro de la circunferencia circunscrita; circuncentro como punto interior al triángulo en triángulos acutángulos y como punto exterior al triángulo en triángulos obtusángulos; incentro como centro de la circunferencia inscrita; ortocentro como punto interior al triángulo en triángulos acutángulos y como punto exterior al triángulo en triángulos obtusángulos; alineación de baricentro–circuncentro–ortocentro (recta de Euler en triángulos no equiláteros). Particularidades generadas en: triángulos equiláteros (todas las rectas y los puntos notables coinciden), triángulos isósceles (las rectas notables correspondientes al lado desigual coinciden); triángulos rectángulos (circuncentro como punto medio de

---

[23] Ejemplo: en el experimento simple de lanzar un dado y mirar la cara hacia arriba, p (sacar impar o sacar múltiplo de tres) = p (impar) + p (múltiplo de tres) – p (impar y múltiplo de tres).

[24] Ejemplo: en el experimento simple de lanzar un dado y mirar la cara hacia arriba, p (sacar par o sacar múltiplo de cinco) = p (par) + p (múltiplo de cinco).

[25] Es razón suficiente pero no necesaria. Ejemplo: en el experimento simple de lanzar un dado no trucado y mirar la cara hacia arriba, p (par) + p (como mucho cuatro) = 3/6 + 4/6= 1/2 + 2/3 = 7/6 => por lo tanto los sucesos salir "par" y "como mucho cuatro" son compatibles. Sin embargo, p (par) + p (múltiplo de tres) = 1/2 + 1/3 = 5 /6 que es un número inferior a 1 => no significa que salir "par" y "múltiplo de tres" sean incompatibles porque, de hecho, son compatibles (tienen en común el {6}).

[26] Ejemplo: en el experimento simple de lanzar un dado no trucado y mirar la cara hacia arriba, defino A="sacar par"={2,4,6} y B="sacar como mucho cinco"={1,2,3,4,5} => p (par sabiendo que ha salido como mucho cinco) = p (A|B) = 2/5; en el mismo experimento, la p (par | impar) = 0. Para ejemplos más complicados (sucesos elementales no equiprobables) se usará la fórmula general: p(A|B)=p(A∩B)/p(B).

[27] A y B serán independientes si p(A|B)=p(A) => p(A∩B)=p(A)·p(B). Ejemplo: en el experimento simple de lanzar un dado no trucado y mirar la cara hacia arriba, los sucesos A="sacar par" ={2,4,6} y B="sacar como mucho cuatro" ={1,2,3,4} son independientes, pues p(sacar par sabiendo que ha salido como mucho cuatro) = p(A|B)=2/4=1/2=p(A) => p(sacar par y como mucho cuatro)= p(A∩B)=2/6=1/3=p(A)·p(B)=3/6 · 4/6.

[28] Los alumnos conocen de 1º y 2º ESO las fórmulas de funciones que dibujan rectas.

[29] Mostrar los métodos de dibujo del jardinero (con cuerdas).

[30] Interesante ilustrar las matemáticas teóricas con sus aplicaciones prácticas, especialmente en el caso de arco capaz, cónicas y espirales, tanto en la naturaleza como en la técnica.

[31] Las alturas del triángulo se aprendieron a dibujar en 1º de ESO para calcular sus áreas.

hipotenusa[32], ortocentro como vértice de confluencia de catetos). Investigación y dibujo del circuncentro de un polígono dado[33] y de su circunferencia circunscrita.
Uso de Tales para dividir un segmento en partes iguales empleando únicamente regla y compás.
Usando Tales (triángulos en posición de Tales vistos en 1º ESO), introducir el teorema de la altura y del cateto para triángulos rectángulos (desmontando el triángulo grande en dos triángulos semejantes al grande).
Introducción a las transformaciones geométricas[34] de la mano de los movimientos[35]: giros, simetrías y traslaciones. Constatación de las diferencias entre todas ellas. Elementos invariantes de cada una de ellas[36].
Dibujo (en papel cuadriculado con regla y compás o ayudándose de software matemático) de un polígono transformado por el movimiento de otro. Reflexión sobre la conservación o no de la orientación de la figura transformada. Detección de los movimientos efectuados en una partida de Tetris o en la configuración de un friso y una teselación.
Área y volumen de pirámides rectas[37], troncos de pirámide[38] y troncos de cono[39] como añadido al estudio de cuerpos tridimensionales en 2º de ESO.
Área y volumen de la esfera[40], sus casquetes[41] y regiones intermedias[42]. Constatación de que son superficies de revolución[43].

---

[32] Consecuencia de lo cual los triángulos inscritos en circunferencias teniendo un diámetro por lado son irremediablemente triángulos rectángulos.

[33] No todos los polígonos son inscriptibles (han de ser polígonos cíclicos) => por ejemplo: un trapecio solo es inscriptible si es isósceles, los rombos no son inscriptibles... En el caso de polígonos regulares, el circuncentro es lo que se ha estudiado en cursos pasados con el nombre de centro del polígono regular. De ahora en adelante, será muy fácil encontrar el centro de polígonos regulares e inscribirlos en circunferencias (solo hay que dibujar su circuncentro). El circuncentro es importante en el estudio de las pirámides porque es allí donde ha se apoyarse la altura para considerarse "pirámide recta" => ejemplo: "halla el volumen de una pirámide rectangular recta de arista lateral 13cms y lados de la base 5cms y 6cms", solución: al dibujar el circuncentro de un rectángulo se ve que coincide con la intersección de sus diagonales; sabiendo esto se puede calcular la altura da la pirámide fácilmente aplicando Pitágoras (sin esta coincidencia del circuncentro no hay base matemática para usar la diagonal).

[34] Se volverá a hablar de ellas seguidamente con las proyecciones (de los planisferios) y en los fractales de la 3ª evaluación (como ejemplo de sucesiones).

[35] Las definiciones de movimiento y semejanza abordadas con el concepto más riguroso de vector se dejan para el curso siguiente, aunque las homotecias no serán nuevas porque se vieron en 1º con el pantógrafo.

[36] Obviamente se refiere a globalmente invariantes. Hay que recordar que una transformación que deje invariantes tres o más puntos no alineados será necesariamente la transformación identidad. Ejemplo: el simétrico de un triángulo equilátero por cualquiera de sus alturas deja globalmente invariante al círculo, lo cual hace que las alturas sean ejes de simetría.

[37] Las **pirámides rectas** son aquellas cuyas caras laterales son triángulos isósceles (no necesariamente todos iguales => como sucede en la pirámide rectangular recta) y que, para que esto suceda, la altura de la pirámide (la recta perpendicular desde el ápice a la base) ha de pasar por el circuncentro de la base (obligatoriamente un polígono cíclico). Nota: se recuerda que en 2º de ESO se estudiaron las pirámides regulares => aquellas pirámides que tienen por base un polígono regular y, además, el vértice opuesto (llamado cúspide, ápice o vértice de la pirámide) se encuentra sobre el centro (circuncentro) de ese polígono regular (la altura de la pirámide se proyecta en el centro de la base); en consecuencia, tienen todas las caras laterales iguales y en forma de triángulos isósceles (todas las aristas laterales son iguales).

[38] Lo importante de estas fórmulas es aprender a utilizarlas hallando los datos necesarios (a través de Pitágoras, por ejemplo), no tanto su aprendizaje memorístico. Nomenclatura: h= Altura tronco; $A = \text{Área}_{Base\ mayor}$; $A' = \text{Área}_{Base\ menor}$; $P = \text{Perímetro}_{Base\ mayor}$; $P' = \text{Perímetro}_{Base\ menor}$;
$\text{Área}_{\boldsymbol{Total}} = \frac{\boldsymbol{P+P\prime}}{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{Apotema} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A'}$; $\boldsymbol{Volumen} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A'} + \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A'}})$

[39] Nomenclatura: h=Altura tronco; g= generatriz tronco; R= Radio base mayor; r=Radio base menor;
$\text{Área}_{\boldsymbol{Total}} = \boldsymbol{\pi} \cdot [\boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}]$; $\boldsymbol{Volumen} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{h} \cdot (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{r})$

[40] $\text{Área}_{\boldsymbol{Esfera}} = \boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$; $\boldsymbol{Volumen} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}$

Problemas[44] cotidianos de polígonos, poliedros y cuerpos redondos (cilindro, cono, esfera, casquetes) y sus composiciones[45] que necesiten todas las herramientas adquiridas hasta ahora: simetrías (en polígonos y poliedros), teorema de Pitágoras, rectas y puntos notables.
Coordenadas geográficas para calcular trayectorias ideales de aviones y barcos en el globo terráqueo: siguiendo paralelo o meridiano[46]. Husos horarios para calcular horas de llegada de los vuelos y cruceros[47]. Cálculo de las coordenadas de la antípoda de un lugar. Cálculo de la distancia entre dos lugares situados sobre el globo terráqueo dados por sus coordenadas geográficas. Como otra aplicación de Tales (ángulos entre rectas paralelas y perpendiculares), calcular la altura solar máxima en cuatro momentos del año en una latitud dada: equinoccio de primavera, solsticio de verano, equinoccio de otoño y solsticio de invierno. Uso de esta altura solar para reproducir el experimento que llevó a Eratóstenes a calcular el radio de la Tierra. Cálculo de los ángulos de inclinación de las placas fotovoltaicas[48] dependiendo de la latitud de la instalación[49].
Proyecciones de poliedros[50]. Planisferios terrestres[51] como proyecciones: cilíndricas, cónicas, ortográficas, estereográficas, gnomónicas. Proyección de Mercator[52] frente a otras. Constatación de las deformaciones en la medida de ángulos y superficies que derivan en ventajas e inconvenientes de cada una de esas proyecciones. Empleando reglas y compás, interpretación sencilla de cartas náuticas Mercator de distintas extensiones.
Resolución de todos los ejercicios con calculadora y herramientas informáticas.

---

[41] Nomenclatura: R=Radio esfera; r=Radio casquete; h=altura casquete; $\boldsymbol{Área_{casquete} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h}$;
$\boldsymbol{Volumen = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)}$; $\boldsymbol{R = \frac{r^2+h^2}{2h}}$
[42] Nomenclatura: R=Radio esfera; r=Radio casquete; h=altura región intermedia;
$\boldsymbol{Área_{región} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h}$; $\boldsymbol{Volumen = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot (h^2 + 3R^2 + 3r^2)}$;
[43] Se sugiere contar que las gotas de agua son esferas y que el arcoíris es una circunferencia de centro el punto intersección del plano de lluvia con la recta que une el sol y los ojos del observador => fruto de los fenómenos de refracción y reflexión (combinación de física y matemáticas) estudiados por los alumnos en la asignatura de ciencias naturales.
[44] En todos los problemas a lo largo del curso se ha de hacer hincapié en que el alumno, además de hacer la prueba, reflexione sobre la coherencia e idoneidad de la solución obtenida.
[45] Ejemplo: un prisma coronado en media esfera (o en un casquete). Se sugiere hacer algún ejemplo con troncos de pirámides o conos (es una composición fruto de la sustracción de elementos).
[46] Para los más avanzados, se sugiere ilustrar la explicación con los conceptos de loxodrómica y ortodrómica, e incluso podría mostrarse que el teorema de Pitágoras no se cumple en la esfera.
[47] Con esto se le da valor añadido al estudio de la latitud, longitud y lectura de mapas que los alumnos han visto en 1º y volverán a ver en 3º desde la asignatura de Ciencias Sociales; sería absurdo repetir lo mismo otra vez.
[48] Para conseguir mayor insolación, han de estar en perpendicular a los rayos solares.
[49] Se sugiere ampliar con una introducción elemental a los relojes solares de estilo y de gnomon viendo ejemplos de construcción dependiendo de la latitud y longitud del observador, además de las curvas formadas por la sombra del estilo y del gnomon respectivamente. Interesante contar a los alumnos que la sombra de un árbol/edificio/poste dibuja una recta en los equinoccios y un arco de hipérbola en los solsticios. Se sugiere también explicar que, en España, una vivienda con las estancias orientadas al sur es más luminosa que una vivienda orientada a cualquier otro punto cardinal => importante para ahorrar energía al diseñar o comprar casas (se invita, por último, a reflexionar sobre dicha orientación en otras latitudes del planeta).
[50] Como introducción a los planisferios, se empieza proyectando en el plano una figura tridimensional (la identificación de proyecciones de poliedros se hizo en 6º de primaria). Para los más avanzados o para abrirles la mente a todos los alumnos, se sugiere mostrarles las proyecciones en 3D de los poliedros de 4D.
[51] Los planisferios terrestres son empleados en la asignatura de Ciencias Sociales.
[52] La más usada en navegación por su facilidad de trazar rutas de rumbo constante (las loxodrómicas en esta proyección son rectas). La Mercator se visualiza muy bien inflando un globo dentro de un cilindro.

Segunda evaluación (11 semanas)

Números (4 semanas)

Notación científica de exponente entero[53]. Operaciones combinadas de números en notación científica (sin encontrarlos en denominadores). Reducción al mismo exponente antes de sumar/restar. Introducción al sistema binario[54]. Empleo de los prefijos del sistema internacional[55].
Potencias de exponente entero. Propiedades de estas potencias y uso de las mismas para reducir las fracciones de potencias a producto de potencias de base prima y exponente entero. Constatación de que elevar un número a –1 es hacer su inverso[56].
Fracción generatriz de un número decimal. Clasificación de números reales: racionales (naturales, enteros y fracciones) e irracionales. Diferencia entre número racional o irracional dependiendo de si el decimal es finito[57] o infinito: periódico (puro o mixto) o no periódico (raíces, por ejemplo).
Operaciones combinadas en castillos de fracciones y decimales, incluyendo potencias de exponente entero, respetando la jerarquía de operaciones y dando el resultado siempre simplificado.
Cálculo mental[58].
Realización de los ejercicios con y sin calculadora, usando software matemático para la autocorrección del alumno[59].

Álgebra y Análisis[60] (7 semanas)

Desarrollo y factorización de identidades notables (productos notables, identidades notables o en ocasiones también llamado binomio de Newton) conteniendo incluso fracciones.
Operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación de polinomios con múltiples fracciones incluyendo también potencias de binomios.

---

[53] Aunque es la primera vez que se aborda la notación científica, lo cierto es que algunos alumnos la habrán visto fugazmente en la calculadora al operar números muy grandes o muy pequeños. El objetivo es que el alumno pueda hacer ejercicios como este: $-3\cdot 10^{1}\cdot\left(-12\cdot 10^{0}\right)+9{,}2\cdot 10^{-2}\cdot 70=$

[54] Se pretende que puedan escribir un número en sistema binario. Ejemplo: $[101]_2=[1\cdot 2^0+0\cdot 2^1+1\cdot 2^2]_{10}=[5]_{10}$.

[55] En Primaria se aprendieron del nano al Giga. Aquí todos: cuatrillonésimo/*septillonésimo* yocto 10^{-24}, *sextillonésimo* zepto 10^{-21}, trillonésimo/*quintillonésimo* atto 10^{-18}, *cuatrillonésimo* femto 10^{-15}, billonésimo/*trillonésimo* pico 10^{-12}, *billonésimo* nano 10^{-9}, millonésimo micro 10^{-6}, milésimo mili 10^{-3}, centésimo centi 10^{-2}, décimo deci 10^{-1}, unidad 10^{0}, decena deca 10^{1}, centena hecto 10^{2}, millar kilo 10^{3}, millón Mega 10^{6}, *billón* Giga 10^{9}, billón/*trillón* Tera 10^{12}, *cuatrillón* Peta 10^{15}, trillón/*quintillón* Exa 10^{18}, *sextillón* Zetta 10^{21}, cuatrillón/*septillón* Yotta 10^{24}. Nota: en cursiva la nomenclatura anglosajona (interesante hacer ver a los alumnos lo importante que es conocer la procedencia del dato que se proporciona para evitar malentendidos desagradables).

[56] Los alumnos han visto en 1º de ESO los conceptos de elemento neutro y elemento inverso para el producto. El objetivo es que el alumno sea capaz de reducir expresiones como esta: $-\dfrac{36^{3}\cdot(-90)^{-2}\cdot 54}{18^{-4}\cdot(-16)\cdot 50}=$

[57] Sería interesante mostrar a los alumnos (como curiosidad) que un decimal exacto en base 10 puede no serlo en sistema binario (por ejemplo $[2{,}4]_{10}=[10.0110011001100110011001100110\ldots]_2$).

[58] Centrándose en el cálculo mental de porcentajes (incluidos aumentos y disminuciones) para repasarlos de cara a los alumnos de pendientes, pues no es un contenido explícito de 3º.

[59] El manejo de nuevas tecnologías también podrá ser evaluado en los exámenes trimestrales preguntando, por ejemplo, qué comandos se necesitan para realizar una determinada operación.

[60] Mezclamos el álgebra con el análisis para mostrar la utilidad de la factorización a través de las gráficas asociadas a los polinomios, así como para la representación posterior de parábolas.

Ecuaciones de 1º grado con paréntesis **y** fracciones (reduciendo ambos miembros a común denominador[61]), incluyendo la prueba e insistiendo en la conveniencia de no saltarse ningún paso intermedio. Constatación gráfica de que la solución (si la hubiere) de la ecuación $ax + b = cx + d$ es el punto de corte de las rectas $y = ax + b$ y $y = cx + d$ entre ellas (es decir, se está resolviendo en realidad un sistema de ecuaciones).
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas e incompletas, hasta con paréntesis y fracciones, incluyendo la prueba. Constatación de que cualquier igualdad de 2º grado no necesariamente es una ecuación de segundo grado[62]. Constatación de que una ecuación de 2º grado tiene: o cero soluciones (discriminante negativo), o una solución doble (discriminante igual a cero), o dos soluciones distintas (discriminante positivo[63]). Representación gráfica de parábolas con y sin software matemático[64], incluyendo el estudio de puntos de corte y vértice. Constatación de que el vértice de la parábola coincide con el corte en el eje OY si la ecuación es incompleta con b nulo. Constatación de que, si hay solo un punto de corte con el eje OX, éste coincide con el vértice (la solución de la ecuación es doble => polinomio asociado factorizable por identidad notable). Ecuación de la recta que representa el eje de simetría de la parábola. Factorización de los polinomios de segundo grado asociados, constatando que los puntos de corte de las parábolas con el eje OX son las raíces de esos polinomios (los hacen cero) y, por tanto, las soluciones de sus ecuaciones asociadas[65]. Obtención de la ecuación de 2º grado a través de sus soluciones, de las raíces del polinomio asociado o de los puntos de corte de la gráfica de la parábola correspondiente[66]. Problemas de parábolas (optimización, tiro parabólico o tiro vertical) en los que se facilite una función parabólica que se tenga que dibujar y hallar el vértice, puntos de corte y/o algún otro punto[67].

Tercera evaluación (11 semanas)

Álgebra y Análisis (continuación) (8 semanas)

Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (con paréntesis **y** con fracciones)[68], incluyendo la prueba. Problemas cotidianos de sistemas, incluyendo geométricos, proporcionalidad y porcentajes[69], edades (dibujando obligatoriamente una línea o tabla del tiempo) [70], mezclas[71], búsqueda de números…

---

[61] Se sugiere el uso de una sola fracción de “raya larga” que reduzca los errores de signos que comete el alumnado cuando intervienen signos entre fracciones y se requieren paréntesis.
[62] Ejemplo: $x^2 - 3 + 5x = 7 + x^2$.
[63] En el caso de las ecuaciones incompletas con b=0, las dos soluciones existentes serán además opuestas una de la otra.
[64] Los de F&Q necesitan que los alumnos sepan representar parábolas en el inicio de 4º ESO.
[65] Lo que se pretende es que los alumnos incorporen la rutina de hacer, en cada ecuación, tres pasos: factorizar el polinomio asociado, resolver la ecuación y dibujar la gráfica asociada, consiguiendo así interiorizar desde temprana edad la relación entre raíz, solución y punto de corte. Se deben hacer ejercicios que muestren una gráfica y se le pregunte al alumno sobre las soluciones o las raíces de las ecuaciones y polinomios asociados.
[66] Se pretende que den la fórmula k·(x–a)·(x–b) donde k es una variable que se podrá hallar o no si se facilita un dato extra (polinomio mónico o coeficiente de x^2, vértice de parábola u otro punto). Obviamente, este ejercicio tiene sentido si existen dos reales a y b soluciones/raíces/cortes.
[67] Ejemplo: “en un torneo de fútbol de colegio, un niño tira un penalti que describe la trayectoria (en metros) dada por la siguiente parábola: $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$. Dibuja la gráfica que sigue la pelota. ¿Es posible que haya metido gol?”.
[68] De 2º ESO los alumnos han de traer aprendida la resolución de sistemas (con paréntesis **o** con fracciones) por cuatro métodos: reducción, sustitución, igualación y gráficamente. Asimismo, han de saber identificar cuándo un sistema es incompatible, compatible determinado o indeterminado y su significado geométrico.
[69] Momento óptimo para repasar los contenidos de proporcionalidad (en especial porcentajes) vistos en 1º y 2º, pues en 3º no se ven explícitamente.

Sucesiones[72] de figuras, letras y números, incluidos ejemplos de test psicotécnicos y de formación de fractales (sucesiones sencillas de transformaciones geométricas[73] que ayudan a explicar la realidad). Progresiones aritméticas y geométricas: fórmulas de términos generales y fórmulas de recurrencia[74]. Constatación de que los métodos para buscar la fracción generatriz de un número decimal usan las progresiones geométricas. Problemas relacionados, incluidos los ejercicios de intereses compuestos[75].

Análisis (3 semanas)

Identificación de una gráfica a partir del suceso cotidiano que pretende describir.
Descripción detallada de las propiedades globales de **una función dada en forma de gráfica**: i) bien definida (a cada x solo le corresponde una y); ii) dominio de definición; iii) imagen de la función, signo de la función, puntos de corte con los ejes; iv) continuidad (expresada por intervalos o con respecto al dominio[76]) y discontinuidades; v) simetrías[77]; vi) periodicidad[78]; vii) crecimiento, constancia y decrecimiento (señalando máximos y mínimos); viii) concavidad positiva o negativa[79] (señalando puntos de inflexión).

---

[70] Se recuerda que los problemas de móviles se dejan para ser abordados por la asignatura de F&Q de 4º ESO por dos motivos fundamentales: las ecuaciones del movimiento se imparten en la asignatura de Ciencia Naturales y, por otra parte, al ser estos problemas una idealización del movimiento rectilíneo y no ser nosotros especialista de esa asignatura, corremos el riesgo de construir conceptos erróneos en las cabezas de nuestros alumnos. No conviene asumir esa responsabilidad.
[71] Se intentarán hacer problemas que muestren la realidad de la signatura de F&Q, donde se calculan mezclas para trabajar en el laboratorio.
[72] Se agregan al final del álgebra para abordarlas cuando ya se hayan estudiado las ecuaciones de segundo grado y facilitar la resolución de los problemas.
[73] Copo de nieve de Koch, triángulo de Sierpinski (usado en modelado de montañas), curvas de Peano... Las transformaciones geométricas se volverán a ver en 4º con las semejanzas y en la asignatura de Dibujo Técnico de Bachillerato.
[74] Como aplicación, se sugiere contar a los alumnos que los sonidos de la escala musical siguen una progresión geométrica => una cuerda tensada y dividida según una progresión geométrica de razón $\sqrt[12]{\frac{1}{2}} \cong 0{,}94$ toca la escala musical occidental.
[75] Momento para seguir trabajando con porcentajes y sucesiones e introducir a los alumnos en la matemática financiera siguiendo el proceso para calcular capitalizaciones de interés anual simple y compuesto (esta es la única oportunidad de acercarse a la matemática financiera para los estudiantes de la opción de ciencias de 4º).
[76] Ejemplo: se puede decir que f(x)=1/x es continua en $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ o, simplemente, que es continua en todo su dominio.
[77] Interesa que el alumno distinga simetrías doblando imaginariamente la gráfica por alguna recta. Ejemplos: la gráfica de $f(x)=(x-1)^3$ es simétrica respecto a la recta x=1; cualquier parábola es simétrica respecto x=abscisa de su vértice. Se pretende además, que el alumno incorpore a su vocabulario la gráfica de una función par (simétrica respecto al eje OY) e impar (simétrica si coincide al doblar primero por el eje OY y luego por el eje OX). Ejemplos: la gráfica de $f(x)=x^3$ es impar; la gráfica de $f(x)=x^4$ es par.
[78] Se sugiere el estudio detallado de las funciones periódicas derivadas de la luz (onda electromagnética) y el sonido (onda mecánica), estudiados ambos en Ciencias Naturales de 2º de ESO. Obviamente sin introducir la trigonometría, que se verá en 4º opción ciencias.
[79] Se ha de tener en cuenta que solo las regiones pueden tener el calificativo de cóncava o convexa y así habrá que explicárselo a los alumnos. Ejemplo: una parábola limita dos regiones del plano=> la interior a la parábola tiene concavidad positiva y la exterior a la parábola tiene concavidad negativa (región convexa). Para simplificar los ejercicios, se recuerda que el convenio es el siguiente: **mirando la gráfica de la función de arriba abajo**, se dirá que la función en un intervalo determinado tiene concavidad positiva si tiene forma de cuenco; en cambio, se dirá que la función en un intervalo determinado tiene concavidad negativa si tiene forma de cuenco invertido.