Cuarto curso. Opción académicas.
(4 periodos semanales distribuidos idealmente en 2+2)

Edad ideal => 15 años para 16.

Se ruega dimensionar los deberes para casa teniendo en cuenta que el alumno ha de estudiar cada tarde DOS horas y MEDIA que dedicará a todas las asignaturas de la secundaria (no solo a matemáticas).

Se permite el uso de CALCULADORA[1].

Primera evaluación (11 semanas)

[2]Estadística unidimensional (3 semanas)

Añadir, a la ordenación de datos estudiada en cursos pasados, las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas relativas, además de su utilidad[3] en el cálculo de medidas de centralización, posición y dispersión. Añadir también el cálculo de percentiles[4] en las medidas de posición y mantener los diagramas de cajas en los gráficos estadísticos.
Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Emparejamiento de datos de distribuciones dadas como un grupo de gráficos estadísticos y un grupo de medias y desviaciones típicas. Coeficiente de variación y su utilidad para comparar distribuciones heterogéneas. Constatación de que el coeficiente de variación no es más que un tanto por uno (la media reducida a 1).
Realización de ejercicios con y sin calculadora, con y sin hoja de cálculo.

Probabilidad (4 semanas)

Combinatoria: variaciones con y sin repetición, permutaciones con[5] y sin repetición, combinaciones con y sin repetición. Introducción al uso de la combinatoria en genética[6]. Casos posibles en la lotería, la bonoloto

---

[1] **Se recomienda que todos los alumnos adquieran una calculadora que facilite las explicaciones en clase y que les valga para todo su paso por la Enseñanza Secundaria. La propuesta es la calculadora Casio fx–991SP u otra de similares prestaciones y manejo.**
[2] Se empieza por los bloques de estadística, probabilidad y geometría para gradar incrementalmente los contenidos respecto a 1º, 2º y 3º de ESO en el mismo trimestre, posibilitando así el repaso de la materia para los alumnos con la asignatura pendiente.
[3] La utilidad radica en que la frecuencia relativa ya viene dividida por el número de la muestra y hace más rápidos los cálculos. El convenio es nombrar f_i a las frecuencias relativas y fa_i a las frecuencias relativas acumuladas.
[4] Para el cálculo del percentil j% de una distribución continua, previamente se debe buscar (en la columna de frecuencias absolutas acumuladas FA) en qué intervalo se encuentra $\frac{N\cdot j}{100}$; una vez identificado el intervalo $[L_i,L_{i+1})$, se aplica la fórmula $P_j = L_i + \frac{\frac{N\cdot j}{100} - FA_{i-1}}{F_i} \cdot a_i$, donde $a_i = L_{i+1} - L_i$ es la amplitud del intervalo. Nota: obviamente, $Q_1=P_{25}$, $Q_2=Me=P_{50}$ y $Q_3=P_{75}$.
[5] Los más avanzados, pueden intentar deducir los coeficientes del desarrollo $(a+b+c)^4$.
[6] Color de ojos, color de piel, color de pelo, tipos de pelo (liso, rizado, ondulado)… Ejemplo: “Hay cuatro nucleótidos distintos que sintetizan el ADN: citosina, timina, adenina y guanina. Cada tres de estos nucleótidos forman un aminoácido que servirá para hacer una proteína. Sabiendo que, por ejemplo, el aminoácido CCG es el mismo que el CGC o que el GCC, ¿cuántos aminoácidos distintos hay? Solución: combinaciones con repetición => $CR_{4,3}$”.

y las distintas quinielas. Problemas que ilustren la utilidad de la combinatoria, incluyendo el uso de la ley de Laplace. Constatación de la dificultad de obtener premio en estos juegos de azar. Teoría básica de coincidencias para constatar que las matemáticas y lo intuitivamente razonable no siempre concuerda[7].
En una experiencia simple no regular[8], cálculo de probabilidades a posteriori de sucesos elementales a través de la frecuencia relativa y la ley de los grandes números[9].
Distinción entre experiencias aleatorias compuestas de **dos tipos[10]**: **I)** una experiencia aleatoria simple convertida en compuesta al observar varias características de los objetos/sujetos implicados => ejemplos de lanzamiento sencillo de un dado numerado y coloreado, extracción sencilla de cartas en una baraja fijándose en palo y número o de bolas en una urna llena de bolas de colores y numeradas, estudio del color de ojos y el color de pelo en un grupo de personas…; **II)** una experiencia compuesta formada por varias experiencias simples encadenadas => ejemplos observando una única característica en lanzamientos múltiples de monedas, de dados, de chinchetas y en extracciones sucesivas de cartas en una baraja o de bolas en una urna o extracciones sucesivas de elementos en una cadena de producción, una extracción de carta tras un lanzamiento de dado[11]... Casuística de la experiencia compuesta a través de diagramas de árbol. Espacio muestral de sucesos elementales correspondiente a una experiencia compuesta[12].
Constatación de que, con los mismos objetos, el espacio muestral de sucesos elementales será distinto dependiendo de la experiencia compuesta que se defina[13]. En una experiencia compuesta, suceso

---

[7] Dos compañeros de clase que cumplen años el mismo día, tres amigos que se encuentran inesperadamente en otro país, recibir un mensaje dentro de una botella…

[8] En 3º de ESO ya se vio que una experiencia regular es aquella en la que todos los elementos involucrados tienen la misma posibilidad de ser observados, pudiendo emplear la ley de Laplace para calcular las probabilidades de sus sucesos elementales (probabilidad a priori o teórica).

[9] Se dejó pendiente de 3º ESO hasta ver en 4º la frecuencia relativa. Se pretende que el alumno entienda la base teórica del dato experimental que se ofrece en los ejercicios. La ley de los grandes números se enseña de manera intuitiva, pues aún no se ha dado el concepto de límite. Ejercicios como “¿Qué harías para conseguir saber la probabilidad de sacar dos seises en un dado trucado del que desconoces las características?” requieren una contestación teórica que incluya en su redacción 5 conceptos: experimento regular, probabilidad a priori (teórica), ley de Laplace, probabilidad a posteriori (experimental), ley de los grandes números. Nota: cuando las probabilidades se facilitan en porcentajes, obviamente se habla de probabilidad a posteriori pues no conocemos cuántos elementos ha habido involucrados para calcular casos favorables y casos posibles (ejemplo: “una urna con el 45% de bolas rojas, 23% de bolas amarillas y el resto bolas verdes).

[10] En 4º de ESO se verán los dos tipos de experiencias compuestas para hallar espacios muestrales, sin embargo, para trabajar con probabilidades, solo se abordarán las de tipo I) en tablas de contingencia y las de tipo II) en árboles de posibilidades.

[11] Ejemplo: “se lanza una moneda y se extrae una carta de la baraja para observar el lado de la moneda y el palo de la baraja”. ¡Ojo! Enunciados condicionados se dejan para bachillerato => ejemplo: “se lanza una moneda, si sale cara se extrae carta de la baraja para observar el palo, si sale cruz se lanza un dado para observar el número”.

[12] Los sucesos elementales de una experiencia compuesta son la intersección de sucesos elementales de las experiencias simples que lo componen. Se espera que el alumno haga ejercicios variados, incluidos (y no solo) aquellos derivados de experiencias dicotómicas repetidas.

[13] Ejemplo: extraemos una carta de una baraja española ampliada y nos fijamos en el número y en el palo => Ω = {1oros, 1copas, 1espadas, 1bastos, 2oros, 2copas, …, 12oros, 12copas, 12espadas, 12bastos}; extraemos una carta de una baraja española ampliada y nos fijamos en el palo y si pinta figura o no => Ω’= {OrosFigura, OrosNoFigura, CopasFigura, CopasNoFigura, EspadasFigura, EspadasNoFigura, BastosFigura, BastosNoFigura}. En ambos casos los elementos coinciden (las cartas de la baraja española ampliada) pero los espacios muestrales difieren porque dependen de la experiencia aleatoria definida. Otro ejemplo: lanzamos un dado y una chincheta para mirar el número del dado y si la chincheta cae hacia arriba o hacia abajo => Ω ={1arriba, 1abajo, 2arriba, 2abajo, 3arriba, 3abajo, 4arriba, 4abajo, 5arriba, 5abajo , 6arriba, 6abajo}; lanzamos un dado y una chincheta para mirar si es par o impar y si la chincheta cae hacia arriba o hacia abajo => Ω ={ParArriba, ImparArriba, ParAbajo, ImparAbajo}. Igual que antes los elementos coinciden (un dado y una chincheta) pero los espacios muestrales difieren porque dependen de la experiencia aleatoria definida.

compuesto por unión de sucesos elementales[14]. En una experiencia compuesta, suceso compuesto por unión o intersección de otros sucesos compuestos[15]. Suceso contrario. Sucesos compuestos compatibles y sucesos compuestos incompatibles. Constatación de que los sucesos elementales del espacio muestral de cualquier experimento compuesto son incompatibles por definición[16]. Álgebra de sucesos en una experiencia aleatoria compuesta: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Independencia o dependencia de las experiencias simples que componen la experiencia compuesta[17]. Probabilidad condicionada para adjudicar probabilidades a las ramas del árbol de posibilidades de una experiencia compuesta (**de tipo II**) en función de la dependencia o independencia entre las experiencias simples que lo forman[18]. Adjudicación de probabilidades a los sucesos elementales de una experiencia compuesta mediante la multiplicación de las ramas horizontales de su árbol de posibilidades. Constatación de que si las experiencias son independientes, la probabilidad de cada suceso elemental del experimento compuesto es el producto de las probabilidades de los sucesos elementales de los experimentos simples involucrados. Constatación de que la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es 1 (en definitiva la suma de todas las ramas finales del árbol de posibilidades de la experiencia compuesta). Constatación de que la suma de cada grupo de subramas del árbol es 1. Adjudicación de probabilidades a sucesos compuestos sumando las probabilidades de los sucesos elementales involucrados o ayudándose del álgebra de sucesos. Suceso contrario y cálculo de su probabilidad. Distinción entre sucesos equiprobables y no equiprobables. En una experiencia compuesta, cálculo de las probabilidades de sucesos compuestos compatibles[19]: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. En una experiencia compuesta, cálculo de las probabilidades de sucesos compuestos incompatibles[20]: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Constatación de que cuando la suma de las probabilidades

[14] Ejemplo: en la experiencia compuesta de lanzar dos veces una moneda no trucada y anotar el resultado, se define el suceso compuesto A =“una sola cara”=“cara en la primera tirada o cara en la segunda tirada”= {CX, XC}, a su vez formado como unión de sucesos elementales del espacio muestral.

[15] Ejemplo: en la experiencia compuesta de extraer dos cartas con reemplazamiento de una baraja española y anotar el resultado, se define el suceso compuesto B =”sacar al menos un oro”=”sacar un oro o sacar dos oros” => a su vez formado por dos sucesos compuestos.

[16] Por eso las probabilidades de sucesos compuestos de uniones de sucesos elementales se hallarán sumando las probabilidades de los sucesos elementales involucrados (los sucesos elementales son sucesos incompatibles => la intersección es vacía y no se tiene que restar nada al calcular su probabilidad). **Por eso las ramas en vertical de los diagramas de árbol siempre se suman**.

[17] Experiencias compuestas tipo I) dan lugar a experiencias dependientes. Experiencias compuestas tipo II): los lanzamientos sucesivos de monedas, chinchetas, dados… y las extracciones sucesivas **con reemplazamiento** son experiencias independientes; las extracciones sucesivas **sin reemplazamiento** son experiencias dependientes. ¡Ojo! No confundir con **sucesos dependientes o independientes** de estas experiencias compuestas que se verán poco después en este mismo tema.

[18] En la experiencia aleatoria regular compuesta de extraer dos bolas SIN reemplazamiento de una urna con 4 bolas blancas, 2 negras y 1 rosa para observar la combinación de colores, al montar el árbol el alumno se encontrará que tiene que hallar, por ejemplo, p(sacar blanca en la 2ª extracción sabiendo que ha salido negra en la 1º extracción) = p(blanca|negra)=4/7 o p(sacar rosa en la 2ª extracción sabiendo que ha salido rosa en la 1ª extracción)=p(rosa|rosa)=0. Nota: el espacio muestral de esta experiencia aleatoria regular compuesta es Ω={bb, bn, br, nb, nn, nr, rb, rn, rr}, aunque posteriormente se haya visto que el suceso “sacar dos bolas rosas” es un suceso imposible => p(sacar dos bolas rosas)=p(rr)=0 => la definición de espacio muestral es anterior al cálculo de probabilidades.

[19] Ejemplo: en el experimento compuesto de extraer una carta de la baraja española y mirar el palo y si es o no figura, p(sacar algún oros o sacar alguna figura) = p(Oros) + p(Figura) – p(Oro y Figura) = p(OrosFigura u OrosNoFigura) + p(OrosFigura o CopasFigura o EspadasFigura o BastosFigura) – p(OrosFigura) => los sucesos “sacar algún oros” y “sacar alguna figura” son compatibles.

[20] Ejemplo: en el experimento compuesto de extraer una carta de la baraja española y mirar el palo y si es o no figura, p(sacar algún oros o sacar bastos) = p(Oros) + p(Bastos) = p(OrosFigura u OrosNoFigura) + p(BastosFigura o BastosNoFigura) => los sucesos “sacar algún oros” y “sacar algún bastos” son incompatibles, por lo que no hay que restar su intersección (que es vacía).

de dos sucesos es mayor que 1, significa que los sucesos son compatibles; sin embargo, que esa suma sea menor que 1 no equivale a que los sucesos sean incompatibles[21]. Tablas de contingencia en experimentos compuestos (**de tipo I**) como problema inverso a los diagramas de árboles[22]. Probabilidad condicionada en sucesos de una experiencia aleatoria compuesta: p(A|B)=p(A∩B)/p(B). Discusión de si dos sucesos son dependientes o independientes entre sí[23].
Problemas que engloben todo lo anterior y en los que haya que decidir entre árbol de posibilidades o tabla de contingencia en función de los datos que se facilitan[24].

Geometría I[25] (4 semanas)

Ángulos dados en radianes, grados sexagesimales y grados centesimales[26]. Razones trigonométricas de un ángulo[27]: explicación en la circunferencia goniométrica; deducción, a través del teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 1, de las razones trigonométricas del ángulo de 45º; aprendizaje memorístico de las razones trigonométricas del ángulo de 30º; deducción de las razones trigonométricas del ángulo de 60º a partir de las razones del ángulo de 30º[28]; comprobación de la condición trigonométrica indispensable ($sen^2x+cos^2x=1$); deducción (evidente) de las razones de 0º, 90º, 180º y 270º; deducción de las razones de ángulos complementarios ($\alpha + \beta = 90º$) y ángulos suplementarios ($\alpha + \beta = 180º$); memorización de las fórmulas básicas de trigonometría (suma de dos ángulos, resta de dos ángulos,

---

[21] Es razón suficiente pero no necesaria. Ejemplo: en el experimento compuesto de lanzar dos monedas y anotar lo que sale, p (sacar una sola cara) + p (sacar al menos una cara) = p (CX o XC) + p (CX o XC o CC) = 1/2 + 3/4 = 5/4 que es un número mayor que 1 => por lo tanto los sucesos “sacar una sola cara” y “al menos una cara” son compatibles. Sin embargo, p (sacar una sola cara) + p (cara en el 1º lanzamiento y cruz en el 2º lanzamiento) = p (CX o XC) + p (CX) = 1/2 + 1/4 = 3 /4 que es un número menor que 1 => no significa que los sucesos “sacar una sola cara” y “cara en el 1º lanzamiento y cruz en el 2º lanzamiento” sean incompatibles porque, de hecho, son compatibles (tienen en común el suceso elemental CX).

[22] **La finalidad de los árboles es averiguar las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral correspondientes a una experiencia compuesta. La finalidad de las tablas de contingencia es, a partir de las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral correspondientes a una experiencia compuesta, averiguar las probabilidades condicionadas de los sucesos de las experiencias simples que forman el compuesto. Por lo tanto, árboles y tablas son escenarios inversos.**

[23] Tanto en árboles (experiencias compuestas de tipo II con y sin reemplazamiento => experiencias simples encadenadas de manera dependiente o independiente) como en tablas de contingencia (experiencias compuestas de tipo I), se harán preguntas que involucren la probabilidad condicionada de sucesos para aplicar la fórmula (ya vista en 3º de ESO): p(A|B)=p(A∩B)/p(B). Posteriormente, se verá si A y B son o no independientes => sucesos independiente si p (A|B)=p(A) => p(A∩B)=p(A)·p(B).

[24] En este curso los alumnos tienen que decidir si la experiencia aleatoria compuesta es de tipo I o de tipo II.

[25] Se da aquí trigonometría en lugar de semejanzas (que se abordarán en el tercer trimestre) como solicitud de F&Q. A final de curso coincidiendo con la introducción a la geometría analítica (con vectores y semejanzas), se podrá repasar algo de trigonometría en la resolución de ciertos ejercicios.

[26] El objetivo es enseñar a los alumnos las teclas de la calculadora para evitar confusiones desagradables en la realización de los ejercicios. Radianes RAD (el ángulo recto es $\pi/2$ radianes), grados sexagesimales DEG (el ángulo recto es 90^o) y grados centesimales GRA (el ángulo recto es 100^g). Sería interesante contarle a los alumnos que el sistema sexagesimal es un sistema de numeración posicional en base 60 que arrastramos desde la antigüedad por tener el número 60 muchos divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60), hecho que facilita el cálculo con fracciones.

[27] La **trigonometría** es la herramienta matemática que relaciona (por fin) los lados y los ángulos de un triángulo. Hasta ahora los alumnos han estudiado de una parte los ángulos y, de otra, los lados; dos conceptos absolutamente distintos que, sin embargo, están conectados entre ellos.

[28] El estudiante dibuja un triángulo rectángulo con ángulo de 60º y fácilmente ve que el ángulo restante vale 30º, luego las razones trigonométricas se intercambian. En clases sucesivas esto servirá para cimentar las razones de ángulos complementarios.

ángulo doble, ángulo mitad); demostración de expresiones trigonométricas sencillas[29]. Deducción de razones trigonométricas de otros ángulos a partir de lo aprendido[30]. Uso de la calculadora para la obtención tanto de razones trigonométricas de ángulos, como de ángulos a partir de razones trigonométricas[31]. Visualización con ayuda de software matemático de las funciones f(x)=sen(x), f(x)=cos(x) y f(x)=tan(x), identificando las diferencias entre ellas[32]. Teorema del seno. Teorema del coseno. Resolución de triángulos rectángulos. Problemas topográficos; longitudes, áreas y volúmenes en problemas cotidianos[33] de polígonos y poliedros que requieren trigonometría para su cálculo (como añadido a las herramientas de cursos pasados: simetrías de polígonos y poliedros, teorema de Pitágoras, rectas y puntos notables en el triángulo). Problemas de tiro parabólico[34] y de distancias en el globo terráqueo. Utilidad de la trigonometría para dar un punto del plano de dos formas distintas: en coordenadas cartesianas (x,y) y en coordenadas polares (r,α). Cambio de una a otra forma. Relación entre pendiente de una recta (obtenida de y=mx+n) y tangente de su ángulo de inclinación[35]. Ejemplificación de la utilidad de las coordenadas polares mostrando la sencillez de las expresiones de algunos lugares geométricos: ecuación de una circunferencia, ecuación de una recta que pasa por el origen (enlazarlo con su pendiente). Cálculo de las coordenadas (cartesianas y polares) de un punto girado un cierto ángulo respecto al origen. Cálculo de las coordenadas en polares y cartesianas de los vértices de polígonos regulares centrados en el (0,0)[36].

---

[29] Que se resuelvan en dos pasos (dividir/multiplicar o sustituir lo que convenga y operar). Se pretende que el alumno de 4º se inicie en las demostraciones; no se quiere convertir al estudiante en un experto sin darle tiempo de asimilación.

[30] Ejemplo 1: "empleando las igualdades trigonométricas, halla el resto de razones trigonométricas correspondientes a cos (α)=-1/2 sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante". Ejemplo 2: "empleando las igualdades trigonométricas, halla las razones trigonométricas de: el ángulo de 1092º sabiendo que el seno de 12º es 0,2079 (1092º=3·360º+12º); el ángulo de 168º (168º=180º-12º); el ángulo de 87º sabiendo que el coseno de 75º es 0,2588 (87º=75º+12º)". Nota: al alumno no debe confundir razón trigonométrica con ángulo, ni tampoco asimilar razón trigonométrica con un solo ángulo => 1092º tiene las mismas razones trigonométricas que 12º, sin embargo, un tiovivo que girase bruscamente 12º no marearía a sus pasajeros como lo haría otro que girase 1092º. En todos los exámenes se permite el uso de calculadora, sin embargo, en aquellos donde se pida explícitamente el uso de igualdades trigonométricas el alumno tendrá que tener en cuenta que no se le calificará a menos que aparezcan todos los pasos intermedios que aseguren la ejecución del ejercicio sin calculadora (nada impide, obviamente, que use la calculadora para comprobar el resultado).

[31] Ejemplo: "halla todos los ángulos del segundo cuadrante con sen (α) =0,75". Fuera de estas expresiones, se recuerda que ni las ecuaciones trascendentales trigonométricas ni los sistemas de este tipo son objeto de 4º ESO.

[32] El alumno ya las ha visto como ejemplos de funciones periódicas en 3º de ESO. Aquí se pretende que las relacione con su fórmula trigonométrica. Ya no se volverán a estudiar hasta el bachillerato.

[33] Incluidos problemas topográficos (alturas de edificios, pies inaccesibles). Como sugerencias, se podría estudiar el tamaño del arcoíris a través del triángulo rectángulo que se forma desde el observador al plano de lluvia (centro del arcoíris y radio del mismo). Por otra parte, si no se indica lo contrario, los alumnos deben dejar los resultados sin aproximar el valor de π o de las raíces que intervengan. Ejemplo de poliedros: "halla el volumen de una pirámide pentagonal regular recta de lado de la base 6cms, arista de las caras laterales 15cms" => este problema se hizo en 1º de ESO facilitando una aproximación del apotema de la base (4cms) o del radio de la circunferencia circunscrita (5cms); aquí se pueden calcular estos datos usando trigonometría.

[34] Fórmulas: $y = x \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot cos^2\alpha}$; alcance máximo horizontal $=> x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen\ 2\alpha}{g}$; alcance máximo vertical $=>$ $y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\ \alpha}{2g}$. Nota: deducir las fórmulas no es objeto de 4º (sino de la asignatura de física en bachillerato). Ejemplo: "un jugador de fútbol tira los penaltis a 105km/h. ¿Puede meter gol si lanza el balón con 65º? Dibuja la situación".

[35] Interesante contarle al alumno la gran utilidad de la tangente relacionada con el concepto de derivada que ahora no conocen pero que verán en cursos sucesivos y que está ligada a magnitudes físicas como la velocidad o la aceleración.

[36] Ejemplo: "halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas e inscrito en una circunferencia de radio 7cms". Solución: tomando el primer vértice sobre el punto de coordenadas

Segunda evaluación (11 semanas)

Números (4 semanas)

Operaciones combinadas de números en notación científica, incluso encontrándolos en denominadores. Potencias de exponente fraccionario. Propiedades de estas potencias y uso de las mismas para reducir las fracciones de potencias a producto de potencias de base prima y exponente fraccionario. Relación de estas potencias con los radicales. Propiedades de los radicales. Operaciones con radicales. Racionalización. Operaciones combinadas de todo lo anterior en castillos de fracciones y decimales, incluyendo potencias de exponente fraccionario y raíces, respetando la jerarquía de operaciones y dando el resultado siempre simplificado.
Realización de los ejercicios con y sin calculadora, usando software matemático para la autocorrección del alumno[37].
Introducción a la potenciación no racional: la exponenciación. Presentación de un nuevo número: e. Concepto de logaritmo como operación inversa a la exponenciación. Importancia y presencia cotidiana del logaritmo[38]. El logaritmo neperiano. Propiedades de los logaritmos. Cambios de base logarítmica. Cálculo y aproximación de logaritmos con y sin calculadora. Problemas financieros donde aparezcan el logaritmo y el número e[39].
Nueva clasificación de números reales en algebraicos y trascendentes según se puedan obtener o no como solución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales[40].

Álgebra y Análisis[41] (7 semanas)

Factorización de un polinomio de Q[x] siguiendo cuatro pasos: i) sacar factor común; ii) identificación de identidades notables; iii) método de Ruffini y, finalmente si fuera necesario, iv) búsqueda de raíces resolviendo la ecuación de segundo grado asociada. Enseñar con software matemático las gráficas asociadas a estos polinomios, constatando que sus raíces son los puntos de corte con los ejes[42].
Constatación de que los polinomios irreducibles son de dos tipos: de primer grado y de segundo grado (con

---

polares A(7cms, 0º+360ºk), el segundo vértice B se gira 60º en contra de las agujas del reloj B(7cms, 60º+360ºk) y así sucesivamente; posteriormente, se pasa a coordenadas cartesianas con las fórmulas x=r·cos (α), y=r·sen (α).

[37] El manejo de nuevas tecnologías también podrá ser evaluado en los exámenes trimestrales preguntando, por ejemplo, qué comandos se necesitan para realizar una determinada operación.

[38] Los logaritmos han sido imprescindibles en la astronomía, pues antes de inventarse las calculadoras, las tablas de logaritmos representaban una manera muy eficiente de agilizar los cálculos (los logaritmos convierten productos en sumas). Se sugiere mostrar algún ejemplo de cálculo con tablas logarítmicas. En nuestros días, los logaritmos siguen muy presentes en nuestras vidas: las diferentes escalas de terremotos, la escala del brillo de las estrellas, la intensidad de ruido (decibelios), el PH, la dimensión de los fractales… las funciones logarítmicas se ven al final de 4º ESO.

[39] El número **e** es el límite de la capitalización compuesta correspondiente a un C=1€ con interés anual al r=100% y pago de intereses cada vez más frecuente => $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

[40] Algebraicos (conjunto numerable): además de los números racionales, cualquier raíz. Trascendentes (conjunto no numerable): $\pi, e, 2^{\sqrt{3}}$,… Se da esta clasificación para dotar de coherencia a la clasificación posterior de ecuaciones y funciones.

[41] Se recuerda que los contenidos han de ser, en la medida de lo posible, incrementales con respecto a la 2ª evaluación de 3º ESO. Solo así se garantizará el repaso para los estudiantes de pendientes.

[42] Observando que la multiplicidad de estas raíces deriva en puntos extremos (caso de multiplicidad par) o en puntos de inflexión (caso de multiplicidad impar >1), habilitando al alumno a hallar la expresión de un polinomio a través de su gráfica asociada y al revés.

el discriminante de la ecuación asociada negativo)[43]. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor de una colección de polinomios detectando previamente los factores comunes y no comunes a los polinomios implicados y no perdiendo nunca de vista las similitudes del proceso con el mcm y MCD de números enteros. Operaciones con fracciones algebraicas. Uso de software matemático para la autocorrección del alumnado.
Clasificación de ecuaciones en una incógnita: algebraicas (racionales enteras, racionales fraccionarias e irracionales) y trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas)[44].
Ecuaciones bicuadradas (dentro de las ecuaciones algebraicas racionales enteras). Constatación visual de que las gráficas asociadas a estas ecuaciones bicuadradas (obtenidas con software matemático) son siempre simétricas por el eje OY (pares). Constatación gráfica (con ayuda de software matemático) de que las ecuaciones bicuadradas tienen o cero soluciones, o una única solución (obligatoriamente x=0 que puede ser doble o cuádruple), o dos soluciones opuestas (que pueden ser simples o dobles), o tres soluciones (obligatoriamente x=0 doble y otras dos soluciones más opuestas) o cuatro soluciones opuestas dos a dos[45]. Obtención de la ecuación bicuadrada a través de sus soluciones, de las raíces del polinomio asociado o de los puntos de corte de la gráfica correspondiente[46]. Ecuaciones de grado n con posibilidad de resolverse usando las herramientas adquiridas hasta ahora[47]. Interpretación gráfica de sus soluciones con ayuda de software matemático. Constatación de la cantidad y naturaleza de las posibles soluciones de ecuaciones de tercer y cuarto grado a través de su interpretación gráfica[48]. Ecuaciones con fracciones algebraicas[49] (dentro de las ecuaciones algebraicas racionales fraccionarias). Ecuaciones con raíces cuadradas[50] (dentro de las ecuaciones algebraicas irracionales) y constatación de la posibilidad de obtener falsas soluciones debido al método de resolución (a causa de elevar al cuadrado).

---

[43] Esto no se hizo en 3º ESO porque se vio antes de la resolución de ecuaciones de segundo grado.

[44] En 4º solo se ven ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones trascendentes y los sistemas de ecuaciones trascendentes son objeto del bachillerato.

[45] Ejemplos: $x^4+x^2+1=0$ y $x^4-x^2+1=0$ tienen cero soluciones; $x^4+x^2=0$ tiene una solución doble (x=0); $x^4=0$ tiene una solución cuádruple (x=0); $x^4-8x^2-9=0$ tiene dos soluciones opuestas simples (x=$\pm$3 las dos simples); $x^4-2x^2+1=0$ tiene dos soluciones opuestas dobles (x=$\pm$1 las dos dobles); $x^4-x^2=0$ tiene tres soluciones (x=0 doble y dos opuestas simples x=$\pm$1); $x^4-5x^2+4=0$ tiene cuatro soluciones simples (opuestas dos a dos => x=$\pm$1, x=$\pm$2 todas simples);

[46] Se pretende que den la fórmula k·(x-a)·(x+a)·(x-b)·(x+b) donde k es una variable que se podrá hallar o no si se facilita un dato extra (decir que el polinomio es mónico o dar el coeficiente de x^4). Obviamente, este ejercicio tiene sentido si las soluciones/raíces/cortes son todos números reales.

[47] Sacar factor común, identidades notables, Ruffini, ecuación de segundo grado, reduciendo a una posible bicuadrada o, incluso, ayudándose de la calculadora (que puede resolver ecuaciones de hasta grado tres).

[48] Ecuaciones de grado tres: una solución que puede ser simple o triple => ejemplo $x^3+1=0$ (x=-1 simple), $x^3+3x^2+3x+1=0$ (x=-1 triple); dos soluciones (una de ellas doble) => ejemplo $x^3-x^2-8x+12=0$ (x=-3 simple, x=2 doble); tres soluciones simples => ejemplo $x^3+4x^2+x-6=0$ (x=-3, x=-2, x=1 todas simples). Ecuaciones de grado cuatro: cero soluciones => ejemplo $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$, una solución que puede ser doble o cuádruple => ejemplo $3x^4-9x^3+3x^2+12=0$ (x=2 doble), $-x^4+12x^3-54x^2+108x-81=0$ (x=3 cuádruple); dos soluciones que pueden ser simples o dobles => ejemplo $3x^4-3x^3-9x^2+15x-6=0$ (x=-2 simple, x=1 simple), $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$ (x=-1 doble, x=2 doble); tres soluciones (una de ellas doble) => ejemplo $x^4+5x^3-3x^2-17x-10=0$ (x=-5 simple, x=-1 doble, x=2 simple); cuatro soluciones simples => ejemplo $-x^4+10x^3-35x^2+50x-24=0$ (x=1, x=2, x=3, x=4 todas simples).

[49] Se sugiere también apuntar la interpretación gráfica de las soluciones visualizándolas con software matemático.

[50] Ejemplo: $\sqrt{-5x+9}-\sqrt{x^2+3}=0$. Se sugiere apuntar la interpretación gráfica de sus soluciones con ayuda de software matemático.

Problemas donde aparezcan ecuaciones de todos estos tipos, especialmente geométricos[51] y de búsqueda de números, incluso con porcentajes en los enunciados.
Resolución de inecuaciones[52] de primer grado, dando la solución con el intervalo correspondiente. Cuando el segundo miembro de la inecuación de primer grado sea igual a cero, se pedirá dibujar la recta asociada y constatar la solución de la inecuación a través de la observación del signo de esta recta[53]. Resolución de inecuaciones[54] de segundo grado con el segundo miembro cero, dando la solución con intervalos: uno solo o unión de dos intervalos según corresponda. Dibujo de la parábola asociada[55] y constatación de la solución de la inecuación a través de la observación del signo de esta parábola asociada.

Tercera evaluación (11 semanas)

Álgebra y Análisis (continuación) (7,5 semanas)

Sistemas[56] cuadráticos donde intervengan dos cónicas. Constatación gráfica (dibujando grosso modo y usando software matemático) de la existencia de cero soluciones, un punto solución, dos puntos solución, tres puntos solución, cuatro puntos solución o infinitos puntos solución como cortes posibles entre las diversas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas). Problemas cotidianos donde aparezcan estos sistemas, incluso con porcentajes en los enunciados.
Clasificación de funciones elementales reales de variable real: algebraicas (racionales enteras, racionales fraccionarias e irracionales) y trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas[57] e hiperbólicas[58]). Características globales[59] de las gráficas de funciones elementales que servirán de modelo para estudiar otras funciones por composición: f(x)=x, $f(x)=x^2$, f(x)=1/x, f(x)= $\sqrt{x}$, $f(x)=2^x$, f(x)=log(x). Reconocimiento visual de cada una de ellas. Ayudándose de software matemático, comparación[60]con las

---

[51] Se sugiere el problema de dividir un segmento en media y extrema razón para deducir la ecuación de segundo grado que lleva al cálculo del número áureo (para posteriormente contar sus aplicaciones en el arte, arquitectura, anatomía…). $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[52] Las inecuaciones de fracciones algebraicas se darán como parte de las funciones en el tercer trimestre, para estudiar su signo y poder dibujarlas. Los sistemas de inecuaciones no son materia de la ESO.

[53] Ejemplo: -2x+3>0 => recta asociada y=-2x+3 con punto de corte en el eje OX cuando x=3/2 => gráficamente se ve que la recta es positiva (dibujada sobre el eje positivo OY) para valores de la x menores a 3/2 => solución de la inecuación $x \in (-\infty, 3/2)$. Nota: el signo siempre es alternado.

[54] Ejemplo: x^2-3x-4>0. No hace falta enredarse rellenando tablas complicadas, basta con obtener las soluciones de la ecuación x^2-3x-4=0 y hallar el signo de los valores numéricos del polinomio x^2-3x-4 en puntos intermedios. Solución: $x \in (-\infty, -1) \mathrm{U} (4, +\infty)$. Nota: si las soluciones de la ecuación son simples, el signo es alternado.

[55] Sirve de repaso para los que tienen las matemáticas pendientes de 3º ESO, pues allí se vieron en el segundo trimestre.

[56] No son objeto de 4º los sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas. Tampoco el método de Gauss.

[57] Las funciones trigonométricas se introdujeron fugazmente en el primer trimestre cuando se vio trigonometría.

[58] Al dar la clasificación de funciones, se debe poner el ejemplo de la catenaria, tan presente en la arquitectura de nuestros días. Al ser estas funciones combinaciones de exponenciales, se sugiere mostrarlas como ampliación a los alumnos más avanzados.

[59] i) bien definida; ii) dominio de definición de la función; iii) imagen de la función, signo de la función, puntos de corte con los ejes; iv) continuidad y asíntotas; v) simetrías, incluyendo la definición formal de función par f(-x)=f(x) e impar f(-x)=-f(x) vistas solo gráficamente en 3º de ESO; vi) periodicidad; vii) crecimiento y extremos; viii) concavidad y puntos de inflexión. En los casos de la función raíz y la función logaritmo se usarán las inecuaciones de primer grado recién estudiadas para justificar los dominios de definición.

[60] Se pretende que el alumno interiorice la diferencia en las aberturas (pendientes en el caso de rectas ya vistas en 1º ESO) y los puntos de corte de estas gráficas respecto a los modelos anteriores.

funciones f(x)=ax , f(x)=ax^2, f(x)=a/x, f(x)= $\sqrt{ax}$, f(x)=b·a^x, f(x)=log$_a$ bx. Dibujo y estudio[61] de gráficas por composición[62] de las funciones modelos en el sentido: simetría respecto eje OY f(-x); simetría respecto eje OX -f(x); desplazamiento a derecha o izquierda f(x$\pm$k); desplazamiento arriba o abajo f(x)$\pm$k; combinación de todo lo anterior $\pm$f($\pm$x$\pm$k)$\pm$m. Cálculo de la tasa de variación media de estas funciones en un intervalo.
Representación de funciones a trozos[63] (con trozos de las funciones elementales vistas hasta ahora). Comprobación previa de que la función, así formulada, está bien definida (con los intervalos de cada trozo correctamente escritos). Discusión, una vez dibujada, de los ocho puntos de sus características globales[64]. Cálculo de la tasa de variación media de una función a trozos en un intervalo adecuado.
Intersección de intervalos[65]. Estudio del signo de una función algebraica racional entera (polinómica) resolviendo la inecuación (de grado n) asociada y constatando que raíces con multiplicidad par no cambian el signo de la función en ese tramo[66]. Razonamiento coherente de cómo será, grosso modo, la gráfica de este tipo de funciones a partir de los pocos datos obtenidos[67]. Autocorrección con la ayuda de software matemático. Resolución de una inecuación algebraica racional entera (polinómica) mirando directamente su gráfica asociada.
Cálculo de dominios de definición de funciones algebraicas irracionales y funciones trascendentes logarítmicas empleando inecuaciones[68].

---

[61] Una vez dibujas las funciones irracionales y logarítmicas, se ha de justificar el dominio con inecuaciones => ejemplo: h(x)= $\sqrt{x+5}$ => x+5>0 => Dom(h)= $(-5,+\infty)$. Se pretende, además, que el alumno halle los puntos de corte con los ejes siempre y cuando se obtengan ecuaciones estudiadas anteriormente (no ecuaciones logarítmicas, por ejemplo).

[62] Ejemplos para dibujar por composición: y= -x+7; y=(x+4)^2-2; y=-2/(x-5); y= -4^{x+3}; y= -log(1-x). Hay que prevenir a los alumnos de cometer errores cuando aparece –x. Ejemplo: $y=\sqrt{-x+2}$ calcular el dominio ayuda a salir de dudas – x+2>0 => $x \in (-\infty, 2)$; la gráfica se puede hacer como composición de $f(x)=\sqrt{x}$, => $f(-x)=\sqrt{-x}$ => $f(x-2)=\sqrt{-(x-2)}$ => hay que hacer la simetría por el eje OY y luego desplazar dos unidades a la derecha; o también como composición de $f(x)=\sqrt{x}$, => $f(x+2)=\sqrt{x+2}$ => $f(-x)=\sqrt{-x+2}$ => hay que desplazar dos unidades a la izquierda y luego hacer la simetría por el eje OY.

[63] Ni la función valor absoluto ni la función parte entera son objeto de 4º, se abordarán en 1º de bachillerato (no por difíciles sino porque el tiempo es finito y hay que escoger qué contenidos interesa afianzar).

[64] Se recuerda que no son objeto de 4º los ejercicios con una variable k a calcular para que la función a trozos sea continua (se darán en 1º de bachillerato).

[65] Obtenidos de la inecuación de un producto. Se introducen según la necesidad para aplicarlos al cálculo de dominios y signo de funciones. Ejemplo: $(x-3)\cdot(x+4)\geq 0$

[66] Como en el caso de las inecuaciones de segundo grado, no hace falta enredarse rellenando tablas complicadas, basta con obtener las soluciones de la ecuación y hallar el signo de los valores numéricos en puntos intermedios. En ausencia de raíces con multiplicidad par, el signo siempre será alternado.

[67] A estas alturas del curso, los alumnos ya están muy familiarizados con las gráficas de funciones polinómicas, pues las abordaron en el segundo trimestre (y antes en 3º de ESO) para ilustrar la factorización de polinomios y la resolución de ecuaciones (conexión raíz de polinomio <> solución de ecuación <> punto de corte de gráfica). Se pretende que los estudiantes aprendan a defenderse dibujando funciones que presentan **todos** los máximos y mínimos detectables intuitivamente por los **puntos de corte con el eje OX** (funciones como $f(x)=x^3+4x^2+x+6$ se dejan para el bachillerato cuando se vean derivadas). Ejemplo: $f(x)=x^4-8x^3+23x^2-28x+12$ => el alumno tiene suficientes herramientas ya para saber que esta función es continua, ni par ni impar, positiva hasta x=1 y a partir de x=3, negativa en el resto (la raíz doble x=2 no cambia el signo en su tramo y este hecho hace que el punto (2,0) sea un extremo), con puntos de corte en (1, 0), (2, 0) y (3, 0); no es difícil deducir ahora los intervalos aproximados de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos (x=2) y mínimos => aunque no se puedan hallar exactamente todos aún, sí se puede dibujar una buena aproximación de la gráfica. Muy interesante sería descubrir luego los intervalos de concavidad positiva y/o negativa una vez vista la gráfica hecha con software matemático (ejemplo: $f(x)=-x^4+4x^3-7x^2+6x$ con cortes en (0,0), (2,0) y sin puntos de inflexión <> $f(x)=-x^4-5x^3-8x^2-7x-3$ con cortes en (-3,0), (-1,0) y un punto de inflexión).

[68] Ejemplos: f(x)= $\sqrt{x^2-9}$; f(x)=$-5/\sqrt{(x-1)\cdot(x+1)}$; f(x)= $\sqrt{x}/\sqrt{x+1}$; f(x)=log(x^2-1). Se sugiere la visualización de las gráficas de estas funciones empleando software matemático, aunque esto no será objeto de ningún examen.

Cálculo de dominios de definición de funciones racionales fraccionarias[69]. Razonamiento coherente sobre qué rectas x=a serán las candidatas a asíntotas verticales. Estudio del signo de una función algebraica racional fraccionaria resolviendo las inecuaciones (de grado n) asociadas a numerador y denominador y constatando que raíces con multiplicidad par no cambian el signo de la función en ese tramo. Candidatos y=b a asíntotas horizontales. Comportamiento de una función algebraica racional fraccionaria alrededor de las asíntotas (verticales y horizontales)[70]. Razonamiento coherente sobre cómo será, grosso modo, la gráfica de funciones algebraicas racionales fraccionarias a partir de los pocos datos obtenidos[71]. Autocorrección con la ayuda de software matemático. Resolución de una inecuación algebraica racional fraccionaria (con el segundo miembro cero) mirando directamente su gráfica asociada. Introducción al concepto y nomenclatura de límite explicado desde la gráfica de una función[72]. Invención de una gráfica en base a un conjunto de condiciones que debe cumplir[73].

Geometría II[74] (3,5 semanas)

Presentación de un nuevo ente matemático: el vector[75]. Constatación de la diferencia entre un punto y un vector. Suma de vectores y multiplicación por un escalar. Visualización de la relación entre vector y dimensión, mostrando la utilidad de los vectores para recorrer dimensiones[76]. Módulo de un vector empleando sus componentes y el teorema de Pitágoras[77]. Argumento de un vector empleando sus componentes y trigonometría. Distancia entre dos puntos. Cálculo de las expresiones algebraicas que definen ciertos lugares geométricos del plano relacionados con la equidistancia[78]. Cálculo de las coordenadas del punto medio de un segmento. Diferentes ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua, general o implícita y punto–pendiente o explícita. Profundización en las transformaciones

---

69 Ejemplo: $f(x)=4x^2/(2x^3+x-3)$. Los ejercicios con denominadores de primer o segundo grado ya se estudiaron en 3º ESO => ejemplo de 3º: $f(x)=4x^2/(2x-3)$.

70 En 3º se han visto tendencias asintóticas con la calculadora. Se pretende seguir en esta línea y que el alumno deduzca qué parte de una fracción algebraica tiene más peso en el paso al límite (numerador o denominador).

71 Ejemplo: $f(x)=3x/(x^2-1)$ => el alumno tiene suficientes herramientas ya para saber que el dominio de definición de esta función es R–{–1, 1}, que es continua en su dominio, negativa hasta x=–1 y de x=0 a x=1, positiva en el resto, con punto de corte en (0, 0), con asíntota horizontal en y=0 y asíntotas verticales en x=-1 y x=1, que cuando la x se hace muy grande => la y se hace muy pequeña pero positiva, que cuando la x se acerca a -1 con valores mayores => la y se hace muy grande…; no es difícil deducir ahora que siempre es decreciente y que podría haber un punto de inflexión en (0, 0) => se pretende con esto que el adolescente aprenda a hacer conjeturas que luego corregirá con ayuda de software matemático.

72 El objetivo es hacer coherente el currículo de bachillerato => introducir al alumno en el significado y nomenclatura de límites familiariza al adolescente en este nuevo concepto de cara a la etapa siguiente, donde resulta vital para afrontar la asignatura de F&Q y matemáticas. Ejemplo: dada la gráfica de la función $f(x)=\frac{6x^3+4x^2+3x-9}{2x^3+x-3}$, se le puede preguntar al alumno por el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ o por el $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. Se puede preguntar, además, por la fórmula de las asíntotas oblicuas (si las hubiere) siempre que se vean bien en la gráfica mostrada.

73 Ejemplo: “dominio x>2; imagen y>6; asíntota vertical x=2; asíntota horizontal y=6; decreciente en todo su dominio”.

74 Acercamiento a la geometría analítica.

75 Probablemente los de F&Q hayan visto nociones básicas de vectores en el 1º trimestre. Se opta por darlo aquí en favor de la trigonometría (que también necesitan en F&Q para finales del 1º trimestre).

76 Con un vector se recorre una recta; con dos vectores (obviamente linealmente independientes) se recorre un plano; con tres vectores (l.i.) se recorre el espacio. Se recuerda que las ecuaciones de la recta y el plano son materia de bachillerato.

77 Porque no se ha visto el producto escalar.

78 Mediatriz, círculo, elipse, hipérbola y parábola (de directriz paralela a uno de los ejes coordenados). Ejemplo: “halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos A(2, 3) y B(–1, 4)” => Solución: sea P(x, y), ese lugar es una recta llamada mediatriz que cumple d(P, A) = d(P, B), luego $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$ => operando y reduciendo la ecuación de la recta buscada es $-6x + 2y - 4 = 0$.

geométricas[79] de la mano de los vectores para definir formalmente las semejanzas: homotecias y movimientos (giros, simetrías y traslaciones) [80]. Constatación de las diferencias entre todas ellas. Elementos invariantes de cada una de ellas[81]. Utilidad de las semejanzas en el campo de la programación informática[82]. Dibujo[83] (en papel cuadriculado con reglas y compás) de un polígono semejante a otro del que se facilitan las coordenadas de sus vértices y uno de los siguientes datos: el vector de la traslación, el ángulo del giro, la recta de la simetría (horizontal $y=\pm a$, vertical $x=\pm b$ o dada en forma explícita con pendiente unidad $y=\pm x\pm n$[84]) o la razón y centro de la homotecia[85]. Cálculo de las coordenadas de los vértices transformados. Reflexión sobre la conservación o no de la orientación de la figura transformada. Problemas geométricos con vectores que engloben todo lo estudiado, incluido el cálculo de perímetros y áreas de polígonos a partir de las coordenadas de sus vértices y usando, si son necesarias, todas las herramientas adquiridas aquí y en cursos pasados: simetrías, teorema de Pitágoras, rectas y puntos notables en el triángulo, semejanzas y vectores[86].
Uso de la calculadora para trabajar con vectores. Resolución de todos los ejercicios con calculadora y herramientas informáticas.

---

[79] En 3º se han trabajado ya algunas transformaciones geométricas: movimientos y proyecciones. Además, se repasaron también en la formación de fractales.

[80] Se pretende que el alumno domine ya en este nivel las semejanzas en 2D, es decir, empleando vectores y las herramientas de dibujo (reglas y compás).

[81] Obviamente se refiere a globalmente invariantes. Hay que recordar que una transformación que deje invariantes tres o más puntos no alineados será necesariamente la transformación identidad.

[82] En el campo de las tres dimensiones, las semejanzas son vitales para la robótica.

[83] Posibilidad de coordinación con la asignatura de Dibujo Técnico de 4º ESO.

[84] La limitación a estas rectas sencillas es para facilitar el cálculo de coordenadas transformadas usando los vértices de papel cuadriculado.

[85] Cuando la razón es –1, la homotecia se suele llamar simetría respecto a un punto O (el punto O es en realidad el centro de la homotecia).

[86] Ejemplo: "Dibuja el triángulo ABC que tiene por vértices los puntos A(4,0), B(1, –5), C(–2, 0). Calcula las coordenadas de su baricentro. Usa Pitágoras para calcular las medidas de sus lados. Calcula el área de ABC. ¿Qué área tendrá un triángulo tres veces mayor y cuánto medirán sus lados (no tienes que dibujarlo)? Dibuja el triángulo ABC trasladado el vector $\vec{v}$ =(0, 3) y da las coordenadas de sus nuevos vértices DEF. Dibuja con regla y compás el triángulo simétrico a este último por el punto P(–4,2) y da las coordenadas de sus nuevos vértices GHI. Dibuja el triángulo simétrico al ABC por la recta x= –6, dando las coordenadas de sus nuevos vértices JLK".